CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MLRa5 - MP

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 1 (6 *pts*)

Soit E un espace vectoriel quelconque et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$.
1) Démontrer que : $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
Qu'en déduit-on pour la nature de f ? Illustrer géométriquement.
2) Si E est de dimension finie, sous quelle forme simple s'écrit la matrice de f dans une base bien choisie ?
3) Donner un exemple d'endomorphisme f tel que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ mais $f \circ f \neq f$.
4) Donner un exemple d'endomorphisme f qui ne vérifie pas $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

Partie 2 (14 *pts*)

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\sum \frac{x^{n+1}}{2n+2}$.
2. On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1]$, $f(x)$ est défini.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et en déduire une expression de $f(x)$ sur $]-1, 1[$.
4. Justifier que : $\forall k \geq 2, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$.
5. Montrer que : $\sum_{n=0}^{p} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{k=p+2}^{2p+2} \frac{1}{k}$ et en déduire la valeur de $f(1)$.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche PSt10 - MP

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 3 (6 *pts*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappeler la définition de $\exp(\varphi)$ et justifier son existence.
2. On suppose que $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$. Calculer $\exp(\varphi)$.

Partie 4 (14 *pts*)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ tels que

$$\forall t \geq 0 \qquad |f(t)| \leq M\mathrm{e}^{at}$$

Sous réserve d'existence, on définit pour un réel s la quantité :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Lorsqu'elle est définie, la fonction $\mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f.

1. Démontrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$.
2. On définit $f_n : t \mapsto t^n f(t)$. Donner une formule donnant $\mathcal{L}(f_n)$ à l'aide de $\mathcal{L}(f)$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$ et $h_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^n \mathrm{e}^{bt}$. Calculer $\mathcal{L}(h_0)$ en précisant son ensemble de définition. En déduire $\mathcal{L}(h_n)$.
4. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Démontrer que la transformée de Laplace de f' est définie sur $]a, +\infty[$ et que pour tout $s > a$, on a

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MRo07 - MP

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 5 (6 *pts*)

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$$

Partie 6 (14 *pts*)

On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites réelles défini par :

$$\mathcal{U} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_n - u_{n+1} - u_{n+2}\}.$$

1. Justifier que $\mathcal{U}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Prouver l'existence d'un entier d tel que $\mathcal{U}$ soit isomorphe à $\mathbb{R}^d$. En déduire la dimension de $\mathcal{U}$.
3. Traduire matriciellement la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = -u_n - u_{n+1} - u_{n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Expliciter u_n en fonction de n, pour $(u_n) \in \mathcal{U}$.
5. En déduire une base de $\mathcal{U}$.
6. Justifier que toute suite de $\mathcal{U}$ est périodique, en précisant la plus petite période commune.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MLRa8 - MP

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 7 (6 *pts*)

1. Dans un espace vectoriel normé, donner la définition d'un point adhérent à une partie et énoncer la caractérisation séquentielle d'un point adhérent.
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que toute matrice M est adhérente à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est-elle une partie fermée ?

Partie 8 (14 *pts*)

1. Une boîte A contient 2 jetons portant le numéro 0. Une boîte B contient 2 jetons portant le numéro 1. On réalise des échanges au hasard d'un jeton de A contre un jeton de B et on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des deux jetons situés dans A après n échanges.

   On pose : $p_n = P(X_n = 0), q_n = P(X_n = 1), r_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

   Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire une expression matricielle de U_n en fonction de n.
   Le calcul explicite de p_n, q_n, r_n n'est pas demandé.
2. La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui, expliciter sa limite.