

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MLRa5 - PC - PSI - PT

20 min de préparation, 18 min de présentation.

Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 1 (6 pts)

- 1) Soit E un espace vectoriel quelconque et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$. Démontrer que : $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$. Rappeler la caractérisation géométrique de f et illustrer graphiquement.
- 2) On suppose E de dimension finie et on considère une base \mathcal{B}_K de $\ker(f)$ et une base \mathcal{B}_I de $\text{Im}(f)$. Dire pourquoi la famille \mathcal{B} formée par la juxtaposition de \mathcal{B}_K et \mathcal{B}_I forme une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
- 3) Dans un espace de dimension finie, une projection est-elle diagonalisable ? une symétrie est-elle diagonalisable ?

Partie 2 (14 pts)

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\sum \frac{x^{n+1}}{2n+2}$.
2. On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1]$, $f(x)$ est défini.
3. Montrer que f est dérivable sur $] - 1, 1[$ et en déduire une expression de $f(x)$ sur $] - 1, 1[$.
4. Justifier que : $\forall k \geq 2, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$.
5. En admettant : $\sum_{n=0}^p \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{k=p+2}^{2p+2} \frac{1}{k}$, déterminer la valeur de $f(1)$.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche PSt10 - PC-PSI

20 min de préparation, 18 min de présentation.

Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 3 (6 pts)

1. Énoncer la version matricielle du théorème spectral.
2. Dans le cadre de ce théorème, démontrer l'orthogonalité des sous-espaces propres.
3. On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^3 tel que $\text{Tr}(u) = -3$ et 2 est valeur propre de u avec le sous-espace propre $E_2(u) = \text{Vect}((1, 1, -1), (1, 0, 1))$. Déterminer le spectre de u et les sous-espaces propres de u .

Partie 4 (14 pts)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ tels que

$$\forall t \geq 0 \quad |f(t)| \leq Me^{at}$$

Sous réserve d'existence, on définit pour un réel s la quantité :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Lorsqu'elle est définie, la fonction $\mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $h_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^n e^{bt}$.

1. Calculer $\mathcal{L}(h_0)$ en précisant son ensemble de définition.
2. Démontrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, +\infty[$.
3. On admet que sous les mêmes hypothèses, $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ et que ses dérivées successives se calculent par dérivation sous le signe \int . On définit $f_n : t \mapsto t^n f(t)$.
Donner une formule donnant $\mathcal{L}(f_n)$ à l'aide de $\mathcal{L}(f)$.
4. En déduire $\mathcal{L}(h_n)$.
5. On suppose de plus que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. Démontrer que la transformée de Laplace de f' est définie sur $]a, +\infty[$ et que pour tout $s > a$, on a

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MRo07 - PC-PSI

*20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.*

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examineur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examineur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 5 (6 pts)

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

Partie 6 (14 pts)

On considère l'ensemble \mathcal{U} des suites réelles défini par :

$$\mathcal{U} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_n - u_{n+1} - u_{n+2}\}.$$

1. Justifier que \mathcal{U} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Justifier que $\varphi : (u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme de \mathcal{U} vers \mathbb{R}^3 . Que peut-on en déduire pour \mathcal{U} ?
3. Traduire matriciellement la relation de récurrence :

$$u_{n+3} = -u_n - u_{n+1} - u_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Expliciter u_n en fonction de n , pour $(u_n) \in \mathcal{U}$.
5. En déduire une base de \mathcal{U} .
6. Justifier que toute suite de \mathcal{U} est périodique.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MLRa8 - PC - PSI - PT

*20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.*

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examineur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examineur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 7 (6 pts)

1. Donner les développements en série entière en 0 des fonctions cos et ch.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$.
3. Exprimer la somme S de cette série entière en distinguant plusieurs cas selon le signe de x .

Partie 8 (14 pts)

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.
2. Expliciter une matrice diagonale D semblable à M ainsi qu'une matrice de passage P associée. Comment s'écrit la relation entre M , D et P ?
3. Une boîte A contient 2 jetons portant le numéro 0. Une boîte B contient 2 jetons portant le numéro 1. On réalise des échanges au hasard d'un jeton de A contre un jeton de B et on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des deux jetons situés dans A après n échanges.

On pose : $p_n = P(X_n = 0)$, $q_n = P(X_n = 1)$, $r_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

4. En déduire une expression de U_n en fonction de n .