CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MLRa5 - PC - PSI - PT

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 1 (6 *pts*)

1) Soit E un espace vectoriel quelconque et f un endomorphisme de E tel que : $f \circ f = f$. Démontrer que : $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$. Rappeler la caractérisation géométrique de f et illustrer graphiquement.
2) On suppose E de dimension finie et on considère une base $\mathcal{B}_K$ de $\ker(f)$ et une base $\mathcal{B}_I$ de $\mathrm{Im}(f)$. Dire pourquoi la famille $\mathcal{B}$ formée par la juxtaposition de $\mathcal{B}_K$ et $\mathcal{B}_I$ forme une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
3) Dans un espace de dimension finie, une projection est-elle diagonalisable ? une symétrie est-elle diagonalisable ?

Partie 2 (14 *pts*)

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\sum \frac{x^{n+1}}{2n+2}$.
2. On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1]$, $f(x)$ est défini.
3. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et en déduire une expression de $f(x)$ sur $]-1, 1[$.
4. Justifier que : $\forall k \geq 2, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \leq \ln k - \ln(k-1)$.
5. En admettant : $\sum_{n=0}^{p} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \sum_{k=p+2}^{2p+2} \frac{1}{k}$, déterminer la valeur de $f(1)$.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche PSt10 - PT

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 3 (6 *pts*)

1. Énoncer le théorème spectral pour $A \in S_n(\mathbb{R})$.
2. Dans le cadre de ce théorème, démontrer l'orthogonalité des sous-espaces propres quand $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
3. Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Tr}(A) = -3$ et 2 est valeur propre de A avec le sous-espace propre $E_2(A) = \mathrm{Vect}((1,1,-1),(1,0,1))$. Déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A.

Partie 4 (14 *pts*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $M \geq 0$ tels que

$$\forall t \geq 0 \quad |f(t)| \leq M\mathrm{e}^{at}$$

Sous réserve d'existence, on définit pour un réel s la quantité :

$$\mathcal{L}\big(f\big)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Lorsqu'elle est définie, la fonction $\mathcal{L}\big(f\big)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit $h_n : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^n\mathrm{e}^{bt}$.

1. Calculer $\mathcal{L}\big(h_0\big)$ en précisant son ensemble de définition.
2. Démontrer que la fonction $\mathcal{L}\big(f\big)$ est définie sur $]a,+\infty[$.
3. Soit $b > a$. Démontrer que
$$\forall s \geq b \quad \forall t \geq 0 \quad |-tf(t)\mathrm{e}^{-st}| \leq Mt\mathrm{e}^{(a-b)t} \tag{1}$$
4. Déduire de (1) que $\mathcal{L}\big(f\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$.
5. On admet que sous les mêmes hypothèses, $\mathcal{L}\big(f\big)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que ses dérivées successives se calculent par dérivation sous le signe $\displaystyle\int$. On définit $f_n : t \mapsto t^n f(t)$. Donner une formule donnant $\mathcal{L}\big(f_n\big)$ à l'aide de $\mathcal{L}\big(f\big)$.
6. En déduire $\mathcal{L}\big(h_n\big)$.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MRo07 - PT

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 5 (6 *pts*)

1. Donner la définition de deux matrices semblables.
2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
3. Que peut-on dire de la trace de deux matrices semblables ? Prouver ce résultat.
4. Donner deux matrices A et B ayant même trace qui ne sont pas semblables.

Partie 6 (14 *pts*)

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + \sin(t)\, y = 0 \quad (H)$$

2. On note z la solution de (H) telle que $z(0) = 1$. Et on considère $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t) &= z(t) \\ y(t) &= z'(t) \end{cases}$
   Déterminer l'ensemble d'étude de la courbe et montrer que l'on peut se ramener à un segment.
3. Déterminer l'expression de $y'(t)$
   On admet qu'il existe un réel $\beta \in]0, \pi[$ tel que $y'(\beta) = 0$ et tel que $y'(t) \leq 0,\ \forall t \in [0, \beta]$ et $y'(t) \geq 0,\ \forall t \in [\beta, \pi]$.
   On donne les valeurs numériques approchées :
   $\mathrm{e}^{-2} \approx 0.14$, $\mathrm{e}^{\alpha-1} \approx 0.7$, $\beta \approx 0.9$, $x(\beta) \approx 0.7$, $y(\beta) \approx -0.53$
4. Représenter l'allure de $\mathcal{C}$.
   On pourra préciser la tangente au point de paramètre t.

CMT - Seconde série d'épreuves orales

Oral de mathématiques

Planche MLRa8 - PC - PSI - PT

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.

Au début de sa présentation, le candidat annoncera à l'examinateur les questions qu'il a préparées, ainsi que la partie par laquelle il souhaite commencer sa présentation. L'examinateur laissera le candidat exposer d'abord les questions que celui-ci aura mentionnées.

Partie 7 (6 *pts*)

1. Donner les développements en série entière en 0 des fonctions cos et ch.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$.
3. Exprimer la somme S de cette série entière en distinguant plusieurs cas selon le signe de x.

Partie 8 (14 *pts*)

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable.
2. Expliciter une matrice diagonale D semblable à M ainsi qu'une matrice de passage P associée. Comment s'écrit la relation entre M, D et P ?
3. Une boîte A contient 2 jetons portant le numéro 0. Une boîte B contient 2 jetons portant le numéro 1. On réalise des échanges au hasard d'un jeton de A contre un jeton de B et on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des deux jetons situés dans A après n échanges.

   On pose : $p_n = P(X_n = 0), q_n = P(X_n = 1), r_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

   Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
4. En déduire une expression de U_n en fonction de n.