Concours Mines-Télécom - G4

Oral de mathématiques

Planche PC/PT

20 min de préparation, 18 min de présentation.
Documents et calculatrice interdits. Le barème est indicatif.
Le candidat traitera les deux parties dans l'ordre de son choix.

Partie 1 (15 *pts*)

On définit f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)\,\mathrm{I}_n$.

1. Justifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. L'endomorphisme f est-il inversible ?
3. Pour cette question, $n = 2$.
   (a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et diagonaliser A (on pourra considérer la matrice $A - \mathrm{I}_4$). Préciser les vecteurs propres de f.

Partie 2 (5 *pts*)

1. Rappeler le développement en série entière de $\sin x$. Démontrer ce résultat.
2. Développer en série entière $\sin(2x^2)$.

Concours Mines-Télécom